Tema 1. Problemas propuestos

1.- ✍ Sea A el conjunto dado por

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9,\ x > y\}.$$

Se pide:

a) Representación gráfica
b) Razonar si A es abierto, cerrado, acotado, compacto y convexo.
c) Dar, cuando sea posible, las coordenadas de un punto $X_1 \in \operatorname{int}(A)$, $X_2 \in \operatorname{Fr}(A)$ y $X_3 \in \overline{A} \setminus A$.

2.- ✍ Sea A el conjunto dado por

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x + y \leq 2,\ 1 < x \leq y\}.$$

Se pide:

a) Representación gráfica
b) Razonar si A es abierto, cerrado, acotado, compacto y convexo.
c) Dar, cuando sea posible, las coordenadas de un punto $X_1 \in \operatorname{int}(A)$, $X_2 \in \operatorname{Fr}(A)$ y $X_3 \in \overline{A} \setminus A$.

3.- ✍ Sea A el conjunto dado por

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq x^2,\ x \leq y\}.$$

Se pide:

a) Representación gráfica
b) Razonar si A es abierto, cerrado, acotado, compacto y convexo.
c) Dar, cuando sea posible, las coordenadas de un punto $X_1 \in \operatorname{int}(A)$, $X_2 \in \operatorname{Fr}(A)$ y $X_3 \in \overline{A} \setminus A$.

4.- ✍ Sea A el conjunto dado por

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 1 - x^2,\ 2x + y \geq 1\}.$$

Se pide:

a) Representación gráfica
b) Razonar si A es abierto, cerrado, acotado, compacto y convexo.
c) Dar, cuando sea posible, las coordenadas de un punto $X_1 \in \text{int}(A)$, $X_2 \in \text{Fr}(A)$ y $X_3 \in \overline{A} \setminus A$.

5.- ✍ Sea A el conjunto dado por

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x < y < 2x\}.$$

Se pide:

a) Representación gráfica
b) Razonar si A es abierto, cerrado, acotado, compacto y convexo.
c) Dar, cuando sea posible, las coordenadas de un punto $X_1 \in \text{int}(A)$, $X_2 \in \text{Fr}(A)$ y $X_3 \in \overline{A} \setminus A$.

6.- ✍ Sea A el conjunto dado por

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \ge 1,\ x \ge y,\ x \le 1\}.$$

Se pide:

a) Representación gráfica
b) Razonar si A es abierto, cerrado, acotado, compacto y convexo.
c) Dar, cuando sea posible, las coordenadas de un punto $X_1 \in \text{int}(A)$, $X_2 \in \text{Fr}(A)$ y $X_3 \in \overline{A} \setminus A$.

7.- ✍ Estudiar la existencia del siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

8.- ✍ Estudiar la existencia del siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x y^2}{x^2 + y^2}$$

9.- ✍ Estudiar la existencia del siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x - y}$$

Sugerencia: Estudiar el límite según la parábola $y = x^2 + x$.

10.- ✍ Estudiar la existencia del siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x y^2}{x^2 + y^4}$$

11.- ✍ Estudiar la existencia del siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1 + x^2 - y^2)}{x - y}$$

12.- ✍ Estudiar la existencia del siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2-x}$$

13.- ✍ Estudiar la existencia del siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{y^2+y-x}$$

14.- ✍ Estudiar la existencia del siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}.$$

15.- ✍ Estudiar la existencia del siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2y+y^2x)}{xy}.$$

16.- Estudiar la existencia de los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\operatorname{sen}(xy).$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y}\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right).$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xe^y+ye^x}{x+y}.$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^5+2y^3(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2y^2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+1}-1}.$

h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos x\cos y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$

j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,5)} \frac{xy-5x-2y+10}{\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}}.$

17.- ✍ Estudiar la existencia del siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2-x}.$$

Sugerencia: Estudiar los límites según las direcciones dadas por $x=y^2$ e $y=0$.

18.- Estudiar la continuidad de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy-2(x-y)-4}{\sqrt{x^2+y^2+4(x-y)+8}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(-2,2), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(-2,2). \end{cases}$$

19.- Estudiar la continuidad de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy+x-y-1}{\sqrt{x^2+y^2+2(y-x)+2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(1,-1), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(1,-1). \end{cases}$$

20.- Estudiar la continuidad de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

21.- Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

b) Calcular la función $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

c) Calcular la función $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

22.- Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^3+2xy^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

b) Calcular la función $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

c) Calcular la función $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

23.- ✍ Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(x,y)=(x^2,x\,y,y^2)$ y $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(u,v,w)=(u+v,u+w)$. Consideremos las funciones $F=g\circ f$ y $G=f\circ g$. Aplica la regla de la cadena para calcular:

a) $DF(0,1)$.

b) $DG(1,0,0)$.

24.- ✍ Si $z=x^2+2xy^2$ donde $x=e^t$ e $y=\cos t$, calcular dz/dt mediante la regla de la cadena.

25.- ✍ Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y)=(e^x+e^y,x+y,x-y)$ y $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(u,v,w)=(u-v,uw)$. Calcular, aplicando la regla de la cadena, la $Dh(0,0)$, siendo $h=g\circ f$.

26.- ✍ Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y)=(x+y,x^2+y^2,x-y)$ y $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(u,v,w)=(u^2+v^2+w^2,u+v+w)$. Calcular, aplicando la regla de la cadena, la $Dh(0,1)$, siendo $h=g\circ f$.

27.- ✍ Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y)=x+y+\operatorname{sen}(xy)$ y $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(u)=(u^2,2u)$. Calcular, aplicando la regla de la cadena, la $Dh(0,1)$, siendo $h=g\circ f$.

28.- ✍ Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y)=(x^2+y^2,2xy,1)$ y $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(u,v,w)=(u^2+v^2+w^2,u+v+w)$. Calcular, aplicando la regla de la cadena, la $Dh(0,1)$, siendo $h=g\circ f$.

29.- ✍ Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y)=(x+y,2x+y,x)$ y $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(u,v,w)=(\operatorname{sen}u+\operatorname{sen}v,\operatorname{sen}v+\operatorname{sen}w)$. Calcular, aplicando la regla de la cadena, la $Dh(0,0)$, siendo $h=g\circ f$.

30.- ✍ Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y)=(x^2-y^2,2x+y,x)$ y $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(u,v,w)=(u^2+v^2+w^2,u+v+w)$. Calcular, aplicando la regla de la cadena, la $Dh(0,1)$, siendo $h=g\circ f$.

31.- Sean las funciones $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $f(u,v)=(v+\cos u,u+e^v,uv)$ y $g(x,y)=(x-y,x+\operatorname{sen}y)$. Calcula la matriz derivada de la función compuesta $f\circ g$ en el punto $(0,0)$.

32.- Sean las funciones $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $f(u,v)=(v\cos u,u+v,u+1)$ y $g(x,y,z)=(x-\sin y,x+z)$. Calcula la matriz derivada de la función compuesta $g\circ f$ en el punto $(0,\frac{\pi}{2})$.

33.- Siendo $z=u^2-2uv$, con $u=\frac{x}{y}$, $v=xy$, obtén las derivadas parciales primeras y segundas de z.

34.- ✍ Sean las funciones $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $f(u,v)=(v\cos u,u+v,u+1)$ y $g(x,y,z)=(x-\operatorname{sen}y,x+z)$. Calcular la matriz derivada de la función compuesta $g\circ f$ en el punto $(0,\frac{\pi}{2})$.

35.- ✍ Probar que el sistema

$$x^2+y^2+xz=1,\quad x+y+z=1,$$

define a las variable y,z como funciones de x en un entorno del punto $P(1,0,0)$. Calcular dy/dx y dz/dx en el punto $x=1$.

36.- ✍ Probar que el sistema

$$x^2+y^2+xz+u^2=1, \quad x+y+z+u=1,$$

define a las variable x, y como funciones de u, z en un entorno del punto $P=(x_0,y_0,z_0,u_0)=(1,0,0,0)$. Calcular $\partial x/\partial u$ y $\partial x/\partial z$ en el punto $z=0$, $u=0$.

37.- ✍ Probar que el sistema

$$x^2+y^2+xz=1, \quad x+y+z=1,$$

define a las variable x, z como funciones de y en un entorno del punto $P=(x_0,y_0,z_0)=(1,0,0)$. Calcular dx/dy y dz/dy en el punto $y=0$.

38.- ✍ Probar que el sistema

$$x^2+y^2+xz+u^2=1, \quad x+y+z+u=1,$$

define a las variable z, u como funciones de x e y en un entorno del punto $P=(x_0,y_0,z_0,u_0)=(1,0,0,0)$. Calcular $\partial z/\partial x$ y $\partial u/\partial x$ en el punto $x=1$, $y=0$.

39.- ✍ Probar que el sistema

$$x^2+y^2+xz=1, \quad x+y+z=1,$$

define a las variable x, y como funciones de z en un entorno del punto $P=(x_0,y_0,z_0)=(1,0,0)$. Calcular dx/dz y dy/dz en el punto $z=0$.

40.- Probar que las ecuaciones

$$\begin{cases} x^2+y^2-2uv=0 \\ x^3+y^3+u^3-v^3=0 \end{cases}$$

definen a las variables u y v como funciones de x e y en un entorno del punto $(x,y,u,v)=(1,-1,1,1)$. Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,-1)$ y $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,-1)$.

41.- Probar que las ecuaciones

$$\begin{cases} x^2+y^2-2uv=0 \\ x^3+y^3+u^3-v^3=0 \end{cases}$$

definen a las variables u y v como funciones de x e y en un entorno del punto $(x,y,u,v)=(1,-1,1,1)$. Calcular $\dfrac{\partial v}{\partial y}(1,-1)$ y $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}(1,-1)$.

42.- Probar que la ecuación

$$1-ye^x+xe^y=0$$

define una función implícita $y=y(x)$ en un entorno del punto $(x,y)=(0,0)$. Calcular $y'(0)$.

43.- Probar que las ecuaciones

$$\begin{cases} xy^5 + yu^5 + zv^5 = 1 \\ x^5y + y^5u + z^5v = 1 \end{cases}$$

definen a las variables u y v como funciones implícitas de x, y y z en un entorno del punto $(x,y,z,u,v) = (0,1,1,1,0)$. Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial y}(0,1,1)$ y $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,1,1)$.

44.- Probar que las ecuaciones

$$\begin{cases} xe^u + ye^v = 1 + e \\ ue^x + ve^y = e \end{cases}$$

definen a las variables u y v como funciones implícitas de x e y en un entorno del punto $(x,y,u,v) = (1,1,0,1)$. Calcular $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(1,1)$.

45.- Probar que las ecuaciones

$$\begin{cases} xe^u + ye^v = 1 + e \\ ue^x + ve^y = e \end{cases}$$

definen a las variables x e y como funciones implícitas de u e v en un entorno del punto $(x,y,u,v) = (1,1,0,1)$. Calcular $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(0,1)$.

46.- ✍ Probar que las ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2uv = 0 \\ x^3 + y^3 + u^3 - v^3 = 0 \end{cases}$$

definen a las variables u y v como funciones de x e y en un entorno del punto $(x,y,u,v) = (1,-1,1,1)$. Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,-1)$.

47.- ✍ Probar que las ecuaciones

$$\begin{cases} xy^5 + yu^5 + zv^5 = 1 \\ x^5y + y^5u + z^5v = 1 \end{cases}$$

definen a las variables u y v como funciones implícitas de x, y y z en un entorno del punto $(x,y,z,u,v) = (0,1,1,1,0)$. Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial y}(0,1,1)$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}(0,1,1)$.

48.- ✍ Probar que las ecuaciones

$$\begin{cases} xe^u + ye^v = 1 + e \\ ue^x + ve^y = e \end{cases}$$

definen a las variables u y v como funciones implícitas de x e y en un entorno del punto $(x,y,u,v)=(1,1,0,1)$. Calcular $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(1,1)$.

49.- ✍ Se considera el sistema

$$\begin{cases} x^2+xu-uv=1 \\ ux^2+vy-uv=1. \end{cases}$$

a) Prueba que el sistema anterior define a las variables u y v como funciones de x e y en un entorno del punto $P=(x_0,y_0,u_0,v_0)=(1,1,0,0)$.

b) Calcula $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(P)$.

50.- ✍ Probar que el sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+t^2=2 \\ x+y+z+t=2, \end{cases}$$

define implícitamente a las variables x e y como funciones de z y t en un entorno del punto $P=(x,y,z,t)=(0,1,0,1)$. Calcular $\dfrac{\partial x}{\partial z}(0,1)$.

51.- ✍ Probar que el sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+xz^2-yt^2=1 \\ x+2y-\operatorname{sen} z+\operatorname{sen} t=1, \end{cases}$$

define a las variables y y t como funciones de x y z en un entorno del punto $P=(x_0,y_0,z_0,t_0)=(1,0,0,0)$. Calcular $\dfrac{\partial t}{\partial y}(1,0)$.

52.- ✍ Probar que el sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+xz^2-yt^2=1 \\ x+y-z+t=2, \end{cases}$$

define a las variables x y t como funciones de y y z en un entorno del punto $P=(x_0,y_0,z_0,t_0)=(0,1,0,1)$. Calcular $\dfrac{\partial t}{\partial y}(1,0)$.

53.- ✍ Se considera el sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2=u \\ x+y=v. \end{cases}$$

a) Prueba que el sistema anterior define a las variables x e y como funciones de u y v en un entorno del punto $P=(x_0,y_0,u_0,v_0)=(1,0,1,1)$.

b) Calcula $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(P)$.

54.- ✍ Se considera el sistema

$$\begin{cases} x^5 + y = t \\ x^2 + y^2 = t. \end{cases}$$

a) Prueba que el sistema anterior define a las variables x e y como funciones de t en un entorno del punto $P = (x_0, y_0, t_0) = (1, 0, 1)$.

b) Calcula $x'(1)$ e $y'(1)$.